

İç çarpım uzayı V 'de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortanormal küme ve V 'nin boyutu da n ise, u_1, u_2, \dots, u_n lineer bağımsız olduklarından, u_1, u_2, \dots, u_n V için bir bazdır. Bu baza ortanormal baz denir. Ortanormal bazlarla çalışmak diğer bazlara göre daha kolaydır. Örneğin verilen bir v vektörünün ortanormal baza göre koordinatlarını hesaplamak daha kolaydır.

Teorem: Bir iç çarpım uzayı V 'de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortanormal baz olsun. Eğer

$$v = \sum_{i=1}^n c_i u_i = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

$$\text{ise } c_i = \langle u_i, v \rangle$$

dir.

Örnek: \mathbb{R}^2 'de $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$ ortanormal bazına göre $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörünün koordinatlarını bulunuz.

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2$$

dir.

Örnek 1) $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T$ ve $u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T$ vektörleri

\mathbb{R}^2 'de ortanormal bazdır. $\forall x \in \mathbb{R}^2$ için

$$\langle u_1, x \rangle = \frac{x_1 + 2x_2}{\sqrt{5}} \quad \langle u_2, x \rangle = \frac{-2x_1 + x_2}{\sqrt{5}}$$

$$x = \langle u_1, x \rangle u_1 + \langle u_2, x \rangle u_2$$

$$= \frac{x_1 + 2x_2}{\sqrt{5}} u_1 + \frac{-2x_1 + x_2}{\sqrt{5}} u_2$$

dir. Parseval Formülüne göre

$$\|x\|^2 = \left(\frac{x_1 + 2x_2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{-2x_1 + x_2}{\sqrt{5}}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

dir.

2) $C[-\pi, \pi]$ 'de $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 2x \right\}$ ortanormal kümedir. $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$ integralinin değerini Parseval Formülünden bulunuz.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x)^2 dx$$

$$(\sin^4 x) = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2x$$

$$\|\sin^2 x\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin^2 x dx = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{4}$$

3) $C[-\pi, \pi]$ 'de $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x \right\}$ ortanormal kümedir. $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$

$$a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos 2x dx \quad b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos 4x dx$$

integrallerini hesaplayınız.

$$a) \langle \sin^4 x, \cos 2x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos 2x dx$$

$$= 0$$

$$b) \langle \sin^4 x, \cos 4x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos 4x dx = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{dir. } \langle \cos 4x, \cos 4x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx = 1$$

Dik Matrisler

Tanım: \mathbb{R}^n 'de sütunları ortogonal küme olan, $n \times n$ tipindeki bir Q matrisine dik matris denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ matrisi dik matrisdir.

Teorem: Bir $n \times n$ tipindeki Q matrisinin dik olması için gerek ve yeter şart $Q^T Q = I$ olmasıdır.

Bu teoreme göre eğer Q dik matris ise Q 'nin tersi vardır ve $Q^{-1} = Q^T$ dir.

Örnek: Sabit bir θ açısı için

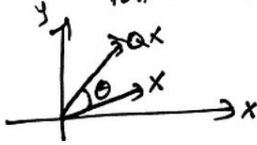
$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

diktir

$$u = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\|u\|^2 = 1 \quad \|v\|^2 = 1$$



Örneğin $\theta = \pi/2$ ile

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Qx = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Eğer Q dik matris ise $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ dir.

Gram-Schmidt dikleştirme işlemi

Teorem: (Gram-Schmidt işlemi) x_1, x_2, \dots, x_n \mathbb{R}^n çarpım uzayı V 'de bir baz olsun.

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$$

ve

$$u_{k+1} = \frac{1}{\|x_{k+1} - p_k\|} (x_{k+1} - p_k), \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

olsun. Burada

$$p_k = \langle x_{k+1}, u_1 \rangle u_1 + \langle x_{k+1}, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle x_{k+1}, u_k \rangle u_k$$

x_{k+1} 'in $\text{span}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ üzerine vektör izdüşümüdür. Bu durumda $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, V 'nin bir ortogonal baidir.

Açıklama: x_1, x_2, \dots, x_n V 'nin bir bazi ise

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$$

olur. $\text{span}(u_1) = \text{span}(x_1)$ dir. p_1 x_2 'nin $\text{span}(u_1)$ üzerine vektör izdüşümü alalım.



$p_1 = \langle x_2, u_1 \rangle u_1$ dir. Bu durumda

dir. $x_2 - p_1 \perp u_1$

$$x_2 - p_1 = -\frac{\langle x_2, u_1 \rangle}{\|x_1\|} x_1 + x_2$$

Örnek: Sabit bir θ açısı için

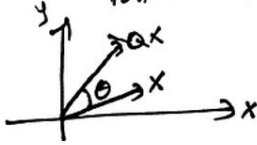
$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

diktir

$$u = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\|u\|^2 = 1 \quad \|v\|^2 = 1$$



Örneğin $\theta = \pi/2$ ile

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Qx = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Eğer Q dik matris ise $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ dir.

Açıklama: x_1, x_2, \dots, x_n V 'nin bir bazi ise

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$$

olur. $\text{span}(u_1) = \text{span}(x_1)$ dir. p_1 x_2 'nin $\text{span}(u_1)$ üzerine vektör izdüşümü alalım.



$p_1 = \langle x_2, u_1 \rangle u_1$ dir. Bu durumda

dir. $x_2 - p_1 \perp u_1$

$$x_2 - p_1 = -\frac{\langle x_2, u_1 \rangle}{\|x_1\|} x_1 + x_2$$

x_1, x_2 linear bağımsız olduklarından $x_2 - p_1 \neq 0$ dir.

$$u_2 = \frac{1}{\|x_2 - p_1\|} (x_2 - p_1)$$

$\text{span}(u_1, u_2) \subset \text{span}(x_1, x_2)$ dir. u_1 ve u_2 linear bağımsız oldukundan $\text{span}(u_1, u_2) = \text{span}(x_1, x_2)$ dir.

p_2 , x_3 'ün $\text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(u_1, u_2)$ üzerine vektör izdüşümü olsun. Bu durumda

$$p_2 = \langle x_3, u_1 \rangle u_1 + \langle x_3, u_2 \rangle u_2$$

olur ve

$$u_3 = \frac{1}{\|x_3 - p_2\|} (x_3 - p_2)$$

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$$

$$p_1 = \langle x_2, u_1 \rangle u_1 \quad \langle x_1, u_1 \rangle = 1$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 - p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

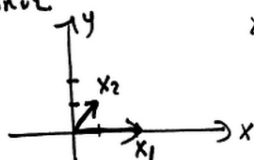
$$u_2 = \frac{1}{\|x_2 - p_1\|} (x_2 - p_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2$$

$$\{u_1, u_2\} = \{e_1, e_2\} \text{ ortogonaldir.}$$

denirse u_1, u_2, u_3 ortogonal baidir. Böyle devam edilirse u_1, u_2, \dots, u_n ortogonal baidir.

Örnek 1) \mathbb{R}^2 'de standart \mathbb{R}^2 çarpım göre

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bazını ortogonal baza dönüştürünüz.

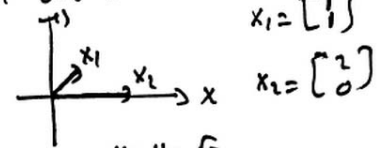


$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|x_1\|^2 = 4 \Rightarrow \|x_1\| = 2$$

1) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ alınrsa $\{u_1, u_2\}$ farklı ortogonal baz olur.



$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|x_1\|^2 = 1+1=2 \Rightarrow \|x_1\| = \sqrt{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \langle x_2, u_1 \rangle u_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 - p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \|x_2 - p_1\| = \sqrt{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|x_2 - p_1\|} (x_2 - p_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\{u_1, u_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

2) $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ olmak üzere üç gerçik

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^3 p(x_i) q(x_i)$$

ile tanımlanan üç gerçik uzayı P_2 'de bir ortonormal baz bulunuz.

$\{1, x, x^2\}$ bazını olarak Gram-Schmidt dikleştirme işlemi ile ortonormal baz oluşturunuz.

339

$$\langle x^2, \frac{x}{\sqrt{2}} \rangle = (1)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 0$$

$$\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = (1)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$p_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\|} (x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}})$$

$$\|x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\|^2 = \langle x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}, x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

340

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \sum_{i=1}^3 1^2 = 3 \quad \|1\| = \sqrt{3}$$

$$u_1 = \frac{1}{\|1\|} 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad p_{10} = x \quad q(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p_1 = \langle x, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \langle x, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle = (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p_1 = 0$$

$$u_2 = \frac{1}{\|x\|} x \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = (-1)(-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$u_2 = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$p_2 = \langle x^2, \frac{x}{\sqrt{2}} \rangle \frac{x}{\sqrt{2}} + \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}}$$

342

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}})$$

$\{u_1, u_2, u_3\}, P_3$ 'de ortonormal bazdır.

3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. A'nın sütun uzayının bir ortonormal bazını bulunuz.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dişersak

x_1, x_2, x_3 linear bağımsız olduğundan A'nın

13. Hafta

9/12

Fuat Ergezen

13. Hafta

10/12

Fuat Ergezen

343

sütun uzayı, \mathbb{R}^4 'ün üç boyutlu bir alt uzayıdır.

$$\|x_1\|^2 = \langle x_1, x_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$$

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \langle x_2, u_1 \rangle u_1 \quad \langle x_2, u_1 \rangle = 3$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 - p_1 = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

$$\|x_2 - p_1\|^2 = \frac{100}{4}$$

345

$$\|x_3 - p_2\|^2 = 16$$

$$u_3 = \frac{1}{\|x_3 - p_2\|} (x_3 - p_2) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$, sütun uzayının bir ortonormal bazıdır. Yani $R(A)$ 'nin bir ortonormal bazıdır.

344

$$u_2 = \frac{1}{\|x_2 - p_1\|} (x_2 - p_1) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \langle x_3, u_2 \rangle u_2 + \langle x_3, u_1 \rangle u_1$$

$$\langle x_3, u_2 \rangle = -2$$

$$\langle x_3, u_1 \rangle = 2$$

$$p_2 = -2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_3 - p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

346

13. Hafta

11/12

Fuat Ergezen

13. Hafta

12/12

Fuat Ergezen